Differenzengleichungen

AN 1.4
Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

453 *Kredit* ⑧

Ein langfristiger Kredit soll mit folgenden Bedingungen getilgt werden: Der offene Betrag wird am Ende eines jeden Jahres mit 5 % verzinst, danach wird jeweils eine Jahresrate von € 20.000 zurückgezahlt.

Aufgabenstellung:

y_2 stellt die Restschuld nach Bezahlung der zweiten Rate zwei Jahre nach Kreditaufnahme dar, y_3 die Restschuld nach Bezahlung der dritten Rate ein Jahr später.

Stellen Sie y_3 in Abhängigkeit von y_2 dar!

454 *Kredittilgung* ⑧

Jemand hat bei einer Bank einen Wohnbaukredit zur Finanzierung einer Eigentumswohnung aufgenommen. Am Ende eines jeden Monats erhöht sich der Schuldenstand aufgrund der Kreditzinsen um 0,4 % und anschließend wird die monatliche Rate von € 450 zurückgezahlt. Der Schuldenstand am Ende von t Monaten wird durch $S(t)$ beschrieben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Differenzengleichung an, mit deren Hilfe man bei Kenntnis des Schuldenstands am Ende eines Monats den Schuldenstand am Ende des darauffolgenden Monats berechnen kann!

455 *Differenzengleichung* ⑧

Die nachstehende Tabelle enthält Werte einer Größe zum Zeitpunkt n ($n \in \mathbb{N}$).

n	x_n
0	10
1	21
2	43
3	87

Die zeitliche Entwicklung dieser Größe kann durch eine Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte der (reellen) Parameter a und b so an, dass damit das in der Tabelle angegebene zeitliche Verhalten beschrieben wird!

456 *Höhe einer Pflanze* ⑧

Die Höhe x einer Pflanze wächst in einem gewissen Zeitraum um 4 % pro Woche.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, die die Entwicklung der Höhe dieser Pflanze beschreibt! Dabei wird n in Wochen angegeben.

$x_0 = 20$

$x_{n+1} - x_n =$ ______________

457 ***Kapitalwachstum*** ⑧

Ein Kapital von € 100.000 wird mit einem fixen jährlichen Zinssatz angelegt. Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über den Verlauf des Kapitals in den ersten drei Jahren. Dabei beschreibt x_n das Kapital nach n Jahren ($n \in \mathbb{N}$).

n in Jahren	x_n in Euro
0	100 000
1	103 000
2	106 090
3	109 272,7

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung zur Bestimmung des Kapitals x_{n+1} aus dem Kapital x_n auf!

458 ***Kapitalsparbuch*** ⑧

Frau Fröhlich hat ein Kapitalsparbuch, auf welches sie jährlich am ersten Banköffnungstag des Jahres den gleichen Geldbetrag in Euro einzahlt. An diesem Tag werden in dieser Bank auch die Zinserträge des Vorjahres gutgeschrieben. Danach wird der neue Gesamtkontostand ausgedruckt.

Zwischen dem Kontostand K_{i-1} des Vorjahres und dem Kontostand K_i des aktuellen Jahres besteht folgender Zusammenhang:

$$K_i = 1{,}03 \cdot K_{i-1} + 5.000$$

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind in diesem Zusammenhang korrekt?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Frau Fröhlich zahlt jährlich € 5.000 auf ihr Kapitalsparbuch ein.	☐
Das Kapital auf dem Kapitalsparbuch wächst jährlich um € 5.000.	☐
Der relative jährliche Zuwachs des am Ausdruck ausgewiesenen Kapitals ist größer als 3 %.	☐
Die Differenz des Kapitals zweier aufeinanderfolgender Jahre ist immer dieselbe.	☐
Das Kapital auf dem Kapitalsparbuch wächst linear an.	☐

459 *Wirkstoff* ⑧

Eine Person beginnt mit der Einnahme eines Medikaments und wiederholt die Einnahme alle 24 Stunden. Sie führt dem Körper dabei jeweils 125 µg eines Wirkstoffs zu. Innerhalb eines Tages werden jeweils 70 % der im Körper vorhandenen Menge des Wirkstoffs abgebaut.

Aufgabenstellung:

Die Wirkstoffmenge x_n (in µg) gibt die vorhandene Menge des Wirkstoffs im Körper dieser Person nach n Tagen unmittelbar nach Einnahme des Wirkstoffs an und kann modellhaft durch eine Differenzengleichung beschrieben werden.

Kreuzen Sie die entsprechende Gleichung an!

$x_{n+1} = (x_n + 125) \cdot 0{,}3$	☐
$x_{n+1} = 0{,}3 \cdot x_n + 125$	☐
$x_{n+1} = 1{,}3 \cdot x_n - 125$	☐
$x_{n+1} = x_n + 125 \cdot 0{,}7$	☐
$x_{n+1} = (x_n - 125) \cdot 0{,}7$	☐
$x_{n+1} = (x_n - 0{,}3) \cdot 125$	☐

460 *Nikotin* ⑧

Die Nikotinmenge x (in mg) im Blut eines bestimmten Rauchers kann modellhaft durch die Differenzengleichung $x_{n+1} = 0{,}98 \cdot x_n + 0{,}03$ (n in Tagen) beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viel Milligramm Nikotin täglich zugeführt werden und wie viel Prozent der im Körper vorhandenen Nikotinmenge täglich abgebaut werden!

461 *Wachstum* ⑧

Wachstum tritt in der Natur fast nie unbegrenzt auf, es erreicht einmal eine gewisse Grenze (Sättigung). Diese Sättigungsgrenze sei K. Der vorhandene Bestand zum Zeitpunkt n sei x_n. Zur Beschreibung vieler Vorgänge (Wachstum von Populationen, Ausbreitung von Krankheiten oder Informationen, Erwärmung etc.) verwendet man folgendes mathematisches Modell:

$x_{n+1} - x_n = r \cdot (K - x_n)$ mit $r \in \mathbb{R}^+, 0 < r < 1$ (r ist ein Proportionalitätsfaktor)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☐
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	☐
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h., man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	☐
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☐
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☐

462 *Wirkstoffe im Körper* ⑧

Ein Patient, der an Bluthochdruck leidet, muss auf ärztliche Empfehlung ab sofort täglich am Morgen eine Tablette mit Wirkstoffgehalt 100 mg zur Therapie einnehmen. Der Körper scheidet im Laufe eines Tages 80 % des Wirkstoffs wieder aus. Die Wirkstoffmenge W_n im Körper des Patienten nach n Tagen kann daher (rekursiv) aus der Menge des Vortags W_{n-1} nach folgender Beziehung bestimmt werden:

$W_n = 0{,}2 \cdot W_{n-1} + 100, W_0 = 100$ (W_i in mg)

In welcher Weise wird sich die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten langfristig entwickeln?

Aufgabenstellung:

Die beiden Textfelder sind so zu ergänzen, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht. Kreuzen Sie dazu in der ersten und der zweiten Spalte jeweils die passende Aussage an!

Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig ___①___, weil ___②___.

①	
unbeschränkt wachsen	☐
beschränkt wachsen	☐
wieder sinken	☐

②	
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr abbaut und damit der Abbau letztlich die Zufuhr übersteigt	☐
dem Körper täglich zusätzlicher Wirkstoff zugeführt wird, der nur zu 80 % abgebaut werden kann, und somit die Zufuhr im Vergleich zum Abbau überwiegt	☐
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt	☐

LÖSUNGEN

453. Kredit
$y_3 = 1{,}05 \cdot y_2 - 20.000$

454. Kredittilgung
$S(t+1) - S(t) = S(t) \cdot 0{,}004 - 450$

455. Differenzengleichung
$a = 2, b = 1$ (am einfachsten erkennbar an den ersten 2 Werten)

456. Höhe einer Pflanze
$x_{n+1} - x_n = 0{,}04\, x_n$

457. Kapitalwachstum
$x_{n+1} = x_n \cdot 1{,}03$

458. Kapitalsparbuch
Aussagen 1 und 3 (Aussage 3 ist richtig, weil zusätzlich zu den 3 % Zinsen jährlich € 5.000 eingezahlt werden.)

459. Wirkstoff
Gleichung 2

460. Nikotin
0,03 mg und 2 %

461. Wachstum
Aussagen 1, 4 und 5 (Aussage 2 ist falsch, weil der Zuwachs pro Zeiteinheit zum Freiraum proportional ist.)

462. Wirkstoffe im Körper
Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig <u>beschränkt wachsen</u>, weil <u>der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt</u>.